

**PROSEMINAR ALGEBRA WS 2014**

Die mit <sup>s</sup> gekennzeichnete Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und am Mittwoch, 7.1., in der Vorlesung abzugeben. Aufgaben mit \* sind etwas anspruchsvoller.

**67** Bestimme den Zerfällungskörper von  $x^3 - 2$  über  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_{31}$ .

**68** (a) Jeder nicht-triviale Körperhomomorphismus ist injektiv.

(b) Bestimme den Zerfällungskörper  $K$  von  $P = x^4 - 4$  über  $\mathbb{Q}$ .

(c)\* Bestimme alle Körper-Automorphismen von  $K$ , die  $\mathbb{Q}$  fixieren.

**69\*** Finde  $a \in \mathbb{R}$ , sodass  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(a)$ .

*Hinweis:* Satz vom primitiven Element.

**70** Zeige: Jeder Körper  $K$  enthält (bis auf Isomorphie) entweder  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{F}_p$  für ein  $p$  prim.

*Bemerkung:* Dieser Unterkörper heisst der Primkörper von  $K$ .

**71<sup>s</sup>** Betrachte  $K = \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 + x - 1 \rangle$  und  $a = \bar{x} \in K$ .

(a) Zeige, dass  $K = \mathbb{Q}[a] = \mathbb{Q}(a)$ .

(b) Bestimme alle  $z \in \mathbb{R}$  mit  $K \cong \mathbb{Q}[z]$ .

(c) Berechne  $a^{-1}$  als Polynom in  $a$ .

(d) Wiederhole die Fragestellung mit  $K = \mathbb{Q}[x]/\langle x^4 + 4 \rangle$  und  $z \in \mathbb{C}$ .

**72** (a) Kann man in  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  bzw.  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  Quadratwurzelziehen? Wenn nicht, bestimme alle Elemente, die Quadrate sind.

(b)\* Untersuche die gleiche Fragestellung für die fünften Wurzeln in  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  und die siebten Wurzeln in  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ . Was fällt auf? Versuche, die Beobachtung allgemein zu beweisen.